ΘΕΩΡΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ   ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΩΝ
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΝΤΩΝΗΣ ΣΕΒΑΣΤΟΣ
2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Σύμφωνα με τις παραδοχές αυτές το διευρυμένο σύνολο $\mathbb{C}$ θα έχει ως στοιχεία:

● Όλους τους πραγματικούς αριθμούς

● Όλα τα στοιχεία της μορφής βi, που είναι γινόμενα των στοιχείων του $\mathbb{R}$ με το i και

● Όλα τα αθροίσματα της μορφής $\alpha+\beta i$, με α και β πραγματικούς αριθμούς.

Τα στοιχεία του $\mathbb{C}$ λέγονται **μιγαδικοί αριθμοί** και το $\mathbb{C}$ **σύνολο των μιγαδικών αριθμών**. Επομένως:

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι ένα ……………….του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, στο οποίο:

● Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι, ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο $\mathbb{R}$, με το μηδέν (0) να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα (1) το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού,

● Υπάρχει ένα στοιχείο ***i*** τέτοιο, ώστε $\boldsymbol{i^2=-1}$,

● Κάθε στοιχείο *z* του $\mathbb{C}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή

$z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Η έκφραση $\alpha+\beta i,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ είναι ακριβώς ότι λέμε **……………. αριθμό**. Είναι η σύνθεση δύο αριθμών, του πραγματικού α και του βi, τον οποίο ονομάζουμε **…………. αριθμό**. Ο α λέγεται **…………… μέρος** του z και σημειώνεται $\mathbf{Re}(z)$, ενώ ο β λέγεται **…………….. μέρος** του z και σημειώνεται $\mathbf{Im}(z)$. Επιπλέον, στο $\mathbb{C}$ κάθε πραγματικός αριθμός α εκφράζεται ως $\alpha+0i$, ενώ κάθε φανταστικός αριθμός βi εκφράζεται ως $0+\beta i$.

Επειδή κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $\alpha+\beta i$, δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$**.** Δηλαδή ισχύει:

$\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow$ **……….**και…………..

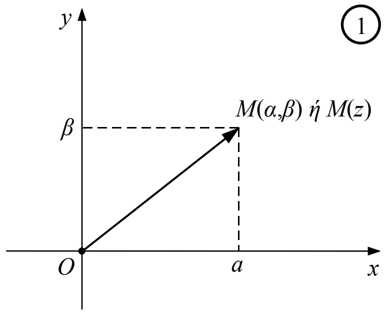
Επομένως, επειδή $0=0+0i$, έχουμε

$\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow$ …….. και…………..

Μετά τον ορισμό της ισότητας μιγαδικών αριθμών δημιουργείται το ερώτημα αν διατάσσονται οι μιγαδικοί αριθμοί. Γνωρίζουμε ότι, κατά την επέκταση από το στο $\mathbb{R}$, οι πράξεις, η διάταξη και οι ιδιότητες αυτών οι οποίες ισχύουν στο, μεταφέρονται και στο $\mathbb{C}$.

Γεωμετρική Παράσταση Μιγαδικών

Κάθε μιγαδικό αριθμό $\alpha+\beta i$ μπορούμε να τον αντιστοιχίσουμε στο σημείο $M(\alpha,\beta)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου. Αλλά και *αντιστρόφως*, κάθε σημείο $M(\alpha,\beta)$ του καρτεσιανού αυτού επιπέδου μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε στο μιγαδικό $\alpha+\beta i$. Το σημείο M λέγεται **……………** του μιγαδικού $\alpha+\beta i$. Αν θέσουμε $z=\alpha+\beta i$, τότε το σημείο $M(\alpha,\beta)$ μπορούμε να το συμβολίζουμε και με $M(z)$.



Ένα καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών θα αναφέρεται ως **………….. επίπεδο**. Ο άξονας $x'x$ λέγεται **……………… άξονας**, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(\alpha,0)$ που είναι εικόνες των πραγματικών αριθμών $\alpha=\alpha+0i$, ενώ ο άξονας $y'y$ λέγεται **……………….** άξονας, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(0,\beta)$ που είναι εικόνες των φανταστικών $\beta i=0+\beta i$

2.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathbb{C}$ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

● Για την **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Για παράδειγμα, $(3+4i)+(5-6i)=(3+5)+(4-6)i=8-2i$.

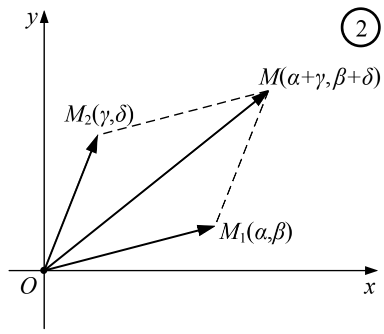
● Για την **αφαίρεση** του μιγαδικού αριθμού $\gamma+\delta i$ από τον $\alpha+\beta i$, επειδή ο αντίθετος του μιγαδικού $\gamma+\delta i$ είναι ο μιγαδικός $-\gamma-\delta i$, έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$.



Επομένως, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:

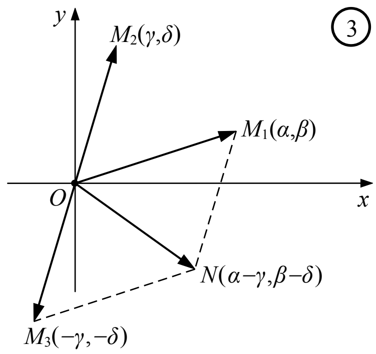
"Η διανυσματική ακτίνα του …………………… των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι το άθροισμα ……………………………………………………………..

Επίσης, η διαφορά

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}_1-\overrightarrow{OM}_2$, δηλαδή:



“**Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των ………………………………………………...**

● Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=$...

Δηλαδή,

$$(\alpha+\beta \boldsymbol{i})(\gamma+\delta \boldsymbol{i})=.$$

Ειδικότερα, έχουμε: $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=$...................................... Ο αριθμός $\alpha-\beta i$ λέγεται **……………………** του $\alpha+\beta i$ και συμβολίζεται με $\overline{\alpha+\beta i}$. Δηλαδή,

$$\overline{\alpha+\beta \boldsymbol{i}}=\text{.......................}\ .$$

● Τέλος, για να εκφράσουμε το **πηλίκο** $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma+\delta i\neq 0$, στη μορφή $\kappa+\lambda i$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρο-νομαστή και έχουμε:

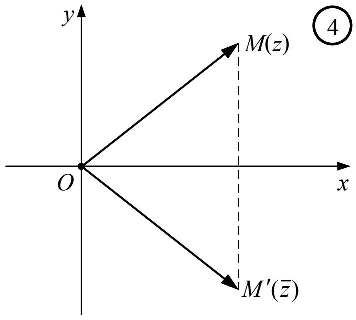
$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\text{..}$$

$$i^{\nu}=\text{...}=\begin{cases} 1 & , \text{ αν } \upsilon=0 \\ i & , \text{ αν } \upsilon=1 \\ -1 & , \text{ αν } \upsilon=2 \\ -i & , \text{ αν } \upsilon=3 \end{cases}$$

.

Ιδιότητες Συζυγών

● Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(\alpha,\beta)$ και $M'(\alpha,-\beta)$ δύο συζυγών μιγαδικών $z=\alpha+\beta i$ και $\bar{z}=\alpha-\beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον ………………………. άξονα.



● Για δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z=\alpha+\beta i$ και $\bar{z}=\alpha-\beta i$ μπορούμε εύκολα, με εκτέλεση των πράξεων, να διαπιστώσουμε ότι:

$$Z+\overline{Z}=.......$$

$$Z-\overline{Z}=..........$$

● Αν $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

1. $\overline{z_1+z_2}=..................$
2. $\overline{z_1-z_2}=....................$
3. $\overline{z_1\cdot z_2}=..................$
4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=..............$

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να αποδειχτούν με εκτέλεση των πράξεων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\overline{z_1+z_2}=....................................$$

………………………………………………………………...

Οι παραπάνω ιδιότητες 1 και 3 ισχύουν και για περισσότερους από δυο μιγαδικούς αριθμούς. Είναι δηλαδή:

$$\overline{Z_1+Z_2+\cdots+Z_\nu}=...........................$$

$$\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_\nu}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\cdot\ldots\cdot\bar{z}_\nu.$$

Ιδιαίτερα, αν είναι $z_1=z_2=\ldots=z_\nu=z$, τότε η τελευταία ισότητα γίνεται:

$$\overline{(Z^\nu)}=.................$$

Επίλυση της Εξίσωσης $\boldsymbol{\alpha z^2+\beta z+\gamma=0}$ **με** $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ***και*** $\boldsymbol{\alpha\neq 0}$

Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο $\mathbb{R}$ και τη μετασχημα-τίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2},$$

όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta>0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- $\Delta=0$. Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$
- $\Delta<0$. Τότε, επειδή………………………………………………………………., η εξίσωση

γράφεται:……………………………………………………………..

Άρα οι λύσεις της είναι:

$$z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}, \qquad (1)$$

οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Παρατηρούμε ότι και εδώ ισχύουν οι σχέσεις:

$Z_1+Z_2=$............... και $Z_1Z_2=$............... .

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου *ν* να υπολογιστεί το άθροισμα

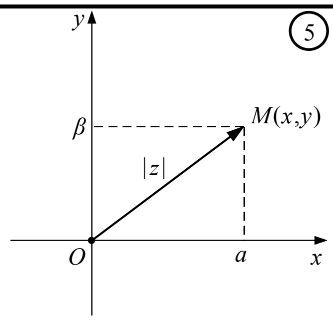
$$\boldsymbol{S=i+i^2+i^3+\cdots+i^\nu}.$$

ΛΥΣΗ

2. Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z στις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο αριθμός $\dfrac{z-1}{z-2i}$ είναι α) φανταστικός β) πραγματικός.

ΛΥΣΗ

2.3 ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ



Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z την ……………… του M από την αρχή O, δηλαδή

$$|z|=|\overrightarrow{OM}|=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Για παράδειγμα, $|3-4i|=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$

Όταν ο μιγαδικός z είναι της μορφής $z=x+0i=x\in\mathbb{R}$, τότε $|z|=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, που είναι η γνωστή μας απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού *x*.

Αν $z=x+yi$, τότε $\bar{z}=x-yi$ και $-z=-x-yi$. Επομένως,

- $|z|=|\dots\dots|=|\dots\dots\dots|=|\dots\dots\dots|$
- $|z|^2=\dots\dots\dots\dots\dots$

Οι επόμενες ιδιότητες αναφέρονται στις σχέσεις που συνδέουν το γινόμενο και το πηλίκο μιγαδικών με τα μέτρα τους και είναι ίδιες με τις αντίστοιχες ιδιότητες των απόλυτων τιμών πραγματικών αριθμών.
Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

- $|z_1\cdot z_2|=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|\Leftrightarrow\dots\dots\dots\dots$$

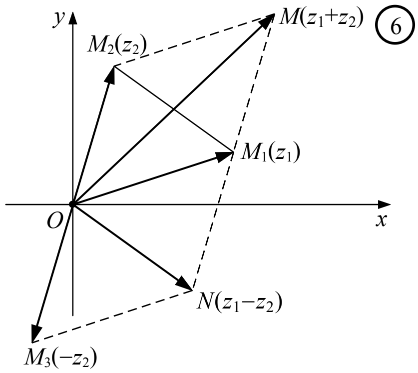
και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη ιδιότητα.

Γενικά, αποδεικνύεται ότι $|z_1 z_2 \dots z_\nu|=$ **…………………………**

και ειδικότερα

$$|\ z^{\nu}\ | = \dots\dots\ .$$



Τέλος, από τη γνωστή μας τριγωνική ανισότητα και από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος z_1+z_2 και της διαφοράς z_1-z_2 δύο μιγαδικών προκύπτει ότι:

$$\boxed{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\le |z_1+z_2| \le \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

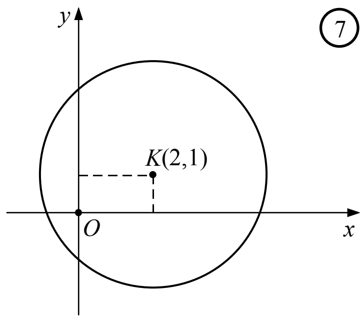
Επίσης, είναι φανερό ότι το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{ON}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2M_1}$. Επομένως:

“Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την……………………………………………...

Δηλαδή:

$$\boxed{(M_1M_2) = |\dots\dots\dots\dots\dots|}$$

Έτσι, για παράδειγμα, η εξίσωση $|z-(2+i)|=3$ επαληθεύεται μόνο από τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να ………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………….



Γενικά, η εξίσωση

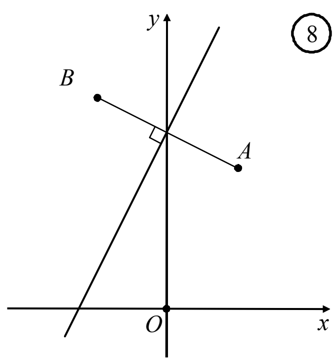
$$|z-z_0| = \rho, \qquad \rho > 0$$

παριστάνει τον **……………….** με κέντρο το σημείο …………… και ……………...

Γενικά, η εξίσωση

$$|z-z_1| = |z-z_2|$$

παριστάνει τη **………………………….** του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν για τους μιγαδικούς $z_1, z_2, \dots, z_\nu$ ισχύει

$$\left|\frac{z_1-i}{z_1+i}\right| + \left|\frac{z_2-i}{z_2+i}\right| + \cdots + \left|\frac{z_\nu-i}{z_\nu+i}\right| < 1,$$

να αποδειχτεί ότι κανένας από αυτούς δεν είναι πραγματικός αριθμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

2. **Αν για το μιγαδικό *z* ισχύει** $|z-(2+2i)|=\sqrt{2}$ **, να βρεθεί:**

α) Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z **στο μιγαδικό επίπεδο.**

β) Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$**.**

ΛΥΣΗ